Вычислительные технологии, 2023, том 28, № 5, с. 45–54. © ФИЦ ИВТ, 2023 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2023, vol. 28, no. 5, pp. 45–54. © FRC ICT, 2023 eISSN 2313-691X

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.005

# Новая методика решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Н. Г. Бандурин[1], Ю. В. Клочков[2,*], О. В. Вахнина[2], А. С. Андреев[2], Ю. М. Перевозкина[2]

[1]Волгоградский государственный технический университет, 400074, Волгоград, Россия

[2]Волгоградский государственный аграрный университет, 400002, Волгоград, Россия

[*]Контактный автор: Клочков Юрий Васильевич, e-mail: klotchkov@bk.ru

*Поступила 14 декабря 2022 г., доработана 07 апреля 2023 г., принята в печать 17 апреля 2023 г.*

В данной работе понятие "новая методика решения уравнений" означает, что при использовании описываемой программы для получения результатов решения нелинейных дифференциальных уравнений с высокой точностью в виде таблиц искомых функций или их производных вперые в истории численных методов отпадает необходимость выбирать метод решения и программировать задачу. Достаточно в определенном инструкцией порядке ввести только необходимые исходные данные: уравнения, краевые условия, начальное приближение и параметры сетки узлов.

Написанная на алгоритмическом языке Delphi 7 программа Bounds1 для коммерческого применения не предназначена и может свободно использоваться читателями журнала.

*Ключевые слова:* интерполяционная процедура, краевые условия, нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения.

*Цитирование*: Бандурин Н.Г., Клочков Ю.В., Вахнина О.В., Андреев А.С., Перевозкина Ю.М. Новая методика решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычислительные технологии. 2023; 28(5):45–54. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.005.

## Введение

При разработке программы для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (НОДУ) использовалась интерполяционная процедура. Авторам известны два следующих способа реализации этой процедуры.

1. Процесс интерполирования применяется непосредственно к искомой функции, а переход к производным, входящим в состав уравнения, осуществляется дифференцированием полученного интерполяционного выражения. В результате этой часто применяемой операции при переходе от функции к ее производной всегда накапливается ошибка [1–10].
2. Интерполяционная процедура выполняется в отношении не искомой функции, а ее первой производной. Выражение для искомой функции получается в результате интегрирования полученного интерполяционного выражения. При таком переходе от производной к функции ошибка не накапливается. Этот подход применялся при разработке данной программы [11–20].

## 1. Вывод формулы интегрирования

Для получения формулы интегрирования предположим, что на отрезке $[x_1, x_n]$ вещественной оси $x$ задана сетка, в $N$ узлах которой известны значения производной $y'$ функции $y = f(x)$, определенной на $[x_1, x_n]$, и значение собственно функции в начальном узле $x = x_1$. Ставится задача вычисления в этих же узлах значений функции $y$, ее производных, выраженных через узловые значения первой производной, и производных при $x = x_1$.

Интерполируя на отрезке $[x_1, x_n]$ $(n \leq N)$ производную $y'(x)$ многочленом степени $n - 1$, можно получить выражение

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}^{-1} y'_j x^{i-1}, \tag{1}$$

где определителем матрицы $Z$ является определитель Вандермонда.

Значения функции $y$ в узлах интерполяции получаются в результате последовательного интегрирования (1) в пределах отрезков $[x_1, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$y_i = y_1 + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} y_j, \tag{2}$$

где $s$ — квадратная матрица интегрирования порядка $n$.

Если $N > n$, то, применяя последовательно формулу (2) на отрезках $[x_{j(n-1)+1}, x_{j(n-1)+n}]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, можно получить компоненты вектора $\mathbf{y}$ во всех узлах отрезка $[x_1, x_n]$

$$\mathbf{y} = \mathbf{I} y_1 + S\mathbf{Y}', \tag{3}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный вектор, $S$ — квадратная матрица интегрирования порядка $N$.

Выполнив интегрирование в соответствии с (3) $p$ раз, получим формулы для вычисления производных в узлах интерполяции, выраженных через значения производных $y'$ в этих же узлах, в начальном узле, а также через значения фукции $y$:

$$\mathbf{Y} = y_1 + S\mathbf{Y}' \quad \text{при } p = 1. \tag{4}$$

Если $p > 1$, то компонентами вектора $\mathbf{Y}^{(1-p)}$ в (4) будут значения интегралов, а формула (4) примет вид

$$\mathbf{Y}^{(1-p)} = S\mathbf{I} y_1 + S\mathbf{Y}. \tag{5}$$

В (5) учтено, что $y_i^{(1-p)} \equiv 0$ при $p > 1$, поскольку в соответствии с принятыми обозначениями эти величины являются значениями интегралов в узле $x = x_1$.

Для любого целого $p \geq 0$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{N} S_{ij}^{p} = \frac{(x_i - x_1)^p}{p!},$$

которое выражает результат интегрирования функции $f(x) = 1$.

Очевидно, что предлагаемая интерполяционная процедура применима не только для функций, но и для их приращений.

Использование формулы (4) при численном решении краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений дает возможность:

1) с высокой точностью аппроксимировать НОДУ, имеющие достаточно гладкие решения, их дискретными аналогами, так как формулы являются точными на отрезке $[x_1, x_k]$ для всех многочленов степени до $k$; в рассматриваемой программе для автоматического решения дифференциальных уравнений принято $k = 9$;

2) решать НОДУ с заданными значениями производных не только на краях отрезка $[x_1, x_n]$, но и внутри области интегрирования, поскольку при выводе формул имеется возможность за начальную точку на отрезке $[x_1, x_n]$ принимать любой узел;
3) при решении НОДУ высокого порядка исключить необходимость выполнения трудоемких алгебраических преобразований на краях области, так как полученные формулы не зависят от номеров узлов, расположенных вне области интегрирования, и содержат в явном виде необходимые для постановки граничных условий производные.

Принятые в программе обозначения (см. "Инструкцию по подготовке исходных данных"):

$x_1$, $x_n$ — начальная и конечная координаты области интегрирования;

$\sin(t)$, $\cos(t)$, $\tan(t)$, $\mathrm{abs}(t)$, $\mathrm{sqrt}(t)$, $\exp(t)$, $\ln(t)$, $\arccos(t)$, $\mathrm{arccosh}(t)$, $\arcsin(t)$, $\mathrm{arcsinh}(t)$, $\arctan(t)$, $\cosh(t)$, $\mathrm{cotan}(t)$, $\sinh(t)$, $\tanh(t)$ — стандартные математические функции;

$t$ — выражение действительного типа;

$pi$ — число $\pi$;

$n_f$ — число неизвестных функций (число уравнений);

$n_x$ — число узлов на оси $x$; $n_x = 5,\ 6, \ldots,\ 151$;

$itertol$ — параметр точности решения;

$hm$ — шаг численного дифференцирования;

$itrlimit$ — заданное предельное число итераций;

$timelimit$ — заданное предельное время решения, с;

$p[1]$, $p[2]$, $\ldots$ — массив числовых параметров, которые не изменяются в процессе решения;

$g_1, g_2, \ldots, g_9, g_\emptyset$ — выражения, вводимые в уравнения для сокращения длины строки;

$w[i, I, ix]$ — производные по $x$ $I$-го порядка $i$-й неизвестной;

$w[i, I, 1]$ — производные по $x$ $I$-го порядка $i$-й неизвестной функции, определенной только на краю $x = x_1$;

$w[i, I, nx]$ — производная $I$-го порядка, определенная только на краю $x = x_n$.

## 2. Примеры решения уравнений

Исходные данные для примера 1 представлены в табл. 1.

*Пример 1.* Начальная задача для НОДУ пятого порядка [19, 20]

$$y^{(V)} - 3(y''y'' + y'y''') = 0, \tag{6}$$

имеющего точное решение $y_T = -4/(x+2) - 1$.

Решение следует найти в области $[0, x_n]$, $x_n = 1$. Начальные условия: $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 1.5$, $y^{(\mathrm{IV})}(0) = -3$. Начальное приближение: $y_0 = x$. Решение уравнения при $N = 100$ завершается в течение двух секунд.

В табл. 2 содержатся значения максимальной локальной ошибки $\Delta$ при вычислении функции $y$ при некоторых значениях $N$ узлов на оси $x$.

*Пример 2.* Краевая задача для уравнения (6).

Краевые условия при $x_n = 1$: $y(0) = -3$, $y'(1) = 4/9$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 1.5$, $y^{(\mathrm{IV})}(1) = -32/81$. Начальное приближение: $y_0 = 0$.

*Пример 3.* "Концевая" задача для уравнения (6).

Условия на краю промежутка интегрирования при $x_n = 1$: $y(1) = -7/3$, $y'(1) = 4/9$, $y''(1) = -8/27$, $y'''(1) = 8/27$, $y^{(\mathrm{IV})}(1) = -32/81$. Начальное приближение: $y_0 = -2/3$.

*Пример 4.*

$$yy'' - y'y' - 6xy^2 = 0, \tag{7}$$

точное решение $y_T = \exp(x^3)$.

Решение необходимо найти в области $[0, 1]$. $y'_T = 3\exp(x^3)x^2$, $y'(1) = 3\exp(1)$. Для этого уравнения итерационный процесс из нулевого начального приближения $y_0 = 0$ не начинается, поэтому принято $y_0 = x$.

Т а б л и ц а 1. Исходные данные для решения примера 1
Table 1. Initial data for solving example 1

| Номер строки | Пояснения | Обозначения в тексте примера | Обозначения в программе |
|---|---|---|---|
| 1 | Число решаемых уравнений | $n_f$ | $nf$ |
| 2 | Число неизвестных параметров | 0 | 0 |
| 3 | Число узлов на оси $x$ | 15 | 15 |
| 4 | Начальная координата $x_1$ | 0 | 0 |
| 5 | Конечная координата $x_n$ | 1 | 1 |
| 6 | Число интегралов “1” | 0 | 0 |
| 7 | Число интегралов “2” | 0 | 0 |
| 8 | Предельное число итераций | 300 | 300 |
| 9 | Предельное время решения, с | 10 | 10 |
| 10 | Ввести 0 | 0 | 0 |
| 11 | Ввести 0 | 0 | 0 |
| 12 | Постоянные числа в уравнениях | – | $p[1]\ p[2]\ \ldots$ |
| 13 | $n_f$ строк со значениями порядка уравнений | 5 | 5 |
| 14 | Точные выражения для функций (если они известны) | $-4/(x+2)-1$ | $-4/(x+2)-1$ |
| 15 | Краевые условия | $y(0) = -3$ | $w[1,0,1]+3=0$ |
| 16 | Начальные выражения | – | 0 |
| 17 | Краевые условия | $y'(0) = 1$ | $w[1,1,1]-1=0$ |
| 18 | » » | $y''(n_x) = -8/27$ | $w[1,2,n_x]+8/27=0$ |
| 19 | » » | $y'''(0) = 1.5$ | $w[1,3,1]-1.5=0$ |
| 20 | » » | $y^{(\mathrm{IV})}(0) = -3$ | $w[1,4,1]+3=0$ |
| 21 | Введите $g_1$ | $y''$ | $w[1,2,ix]$ |
| 22 | » $g_2$ | $y'$ | $w[1,1,ix]$ |
| 23 | » $g_3$ | $y'''$ | $w[1,3,ix]$ |
| 24 | » $g_4$ | – | 0 |
| 25 | » $g_5$ | – | 0 |
| 26 | » $g_6$ | – | 0 |
| 27 | » $g_7$ | – | 0 |
| 28 | » $g_8$ | – | 0 |
| 29 | » $g_9$ | – | 0 |
| 30 | » $g_0$ | – | 0 |
| 31 | $n_f$ строк с дифференциальными уравнениями | $y^{(\mathrm{V})} - 3(y''y''+$ $+y'y''') = 0$ | $w[1,5,ix]-3(g1g1+g2g3)$ |
| 32 | Параметр точности решения | – | 0.000000000001 |
| 33 | Шаг численного дифференцирования | – | 0.000000000001 |

Т а б л и ц а 2. Результаты решения примеров 1–15
Table 2. Results of solving examples 1–15

| Номер примера | Количество узлов $N$ на оси $x$ | | | | | | Число итераций |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 9 | 15 | 30 | 60 | 100 | 150 | |
| 1 | $9 \cdot 10^{-8}$ | $4 \cdot 10^{-9}$ | $4 \cdot 10^{-13}$ | $7 \cdot 10^{-15}$ | $7 \cdot 10^{-15}$ | $7 \cdot 10^{-15}$ | 7 |
| 2 | $1.1 \cdot 10^{-7}$ | $1.5 \cdot 10^{-9}$ | $1.7 \cdot 10^{-12}$ | $8 \cdot 10^{-14}$ | $8 \cdot 10^{-14}$ | $8 \cdot 10^{-14}$ | 14 |
| 3 | $2.4 \cdot 10^{-7}$ | $1.6 \cdot 10^{-10}$ | $1.2 \cdot 10^{-10}$ | $8 \cdot 10^{-9}$ | $1.7 \cdot 10^{-8}$ | $3 \cdot 10^{-8}$ | 19 |
| 4 | $8 \cdot 10^{-5}$ | $6 \cdot 10^{-6}$ | $1.4 \cdot 10^{-9}$ | $1.5 \cdot 10^{-11}$ | $2.3 \cdot 10^{-12}$ | $2.4 \cdot 10^{-12}$ | 6 |
| 5 | $7.5 \cdot 10^{-4}$ | $7.3 \cdot 10^{-6}$ | $1.9 \cdot 10^{-8}$ | $1.8 \cdot 10^{-11}$ | $4.2 \cdot 10^{-12}$ | $1.0 \cdot 10^{-10}$ | 9 |
| 6 | $8 \cdot 10^{-10}$ | $1 \cdot 10^{-11}$ | $2 \cdot 10^{-12}$ | $2 \cdot 10^{-12}$ | $2 \cdot 10^{-12}$ | – | 17 |
| 7 | $9 \cdot 10^{-4}$ | $8 \cdot 10^{-6}$ | $9 \cdot 10^{-6}$ | $8 \cdot 10^{-5}$ | $8 \cdot 10^{-5}$ | $8 \cdot 10^{-5}$ | 3 |
| 8 | $3.8 \cdot 10^{-4}$ | $3.8 \cdot 10^{-4}$ | $3.8 \cdot 10^{-4}$ | $3.8 \cdot 10^{-4}$ | $4 \cdot 10^{-4}$ | $2.3 \cdot 10^{-2}$ | 5 |
| 9 | $3.6 \cdot 10^{-14}$ | $6.3 \cdot 10^{-13}$ | $7.2 \cdot 10^{-13}$ | $9.2 \cdot 10^{-12}$ | $7.2 \cdot 10^{-12}$ | $1.6 \cdot 10^{-12}$ | 8 |
| 10 | $5.1 \cdot 10^{-5}$ | $5.6 \cdot 10^{-7}$ | $1.1 \cdot 10^{-9}$ | $1.6 \cdot 10^{-12}$ | $9.4 \cdot 10^{-13}$ | $1.0 \cdot 10^{-12}$ | 9 |
| 11 | $7.4 \cdot 10^{-5}$ | $1.0 \cdot 10^{-6}$ | $1.6 \cdot 10^{-9}$ | $2.2 \cdot 10^{-12}$ | $2.9 \cdot 10^{-13}$ | $2.2 \cdot 10^{-12}$ | 81 |
| 12 | $1.9 \cdot 10^{-6}$ | $1.6 \cdot 10^{-8}$ | $2.5 \cdot 10^{-11}$ | $7.0 \cdot 10^{-14}$ | $4.3 \cdot 10^{-14}$ | $4.4 \cdot 10^{-14}$ | 6 |
| 13 | $8.6 \cdot 10^{-5}$ | $6.7 \cdot 10^{-8}$ | $1.2 \cdot 10^{-10}$ | $1.8 \cdot 10^{-13}$ | $4.8 \cdot 10^{-14}$ | $4.8 \cdot 10^{-14}$ | 6 |
| 14 | $4.7 \cdot 10^{-4}$ | $7.2 \cdot 10^{-7}$ | $5.2 \cdot 10^{-9}$ | $5.2 \cdot 10^{-12}$ | $5.1 \cdot 10^{-13}$ | $7.0 \cdot 10^{-13}$ | 10 |
| 15 | – | – | $4.7 \cdot 10^{-8}$ | $1.0 \cdot 10^{-10}$ | $2.8 \cdot 10^{-10}$ | $5.5 \cdot 10^{-9}$ | 34 |

*Пример 5.* Дифференцируя (7), получаем

$$yy''' - y'y'' - 6y(y + 2xy') = 0.$$

Решение этого уравнения получено в области $[0,1]$ с краевыми условиями: $y(0) = 1$, $y'(1) = \exp(1)$, $y''(1) = 15\exp(1)$. Начальное приближение: $y_0 = x$.

*Пример 6.* Система НОДУ первого порядка

$$\begin{cases} y_1' - 2y_1 + 5y_2 - 3 = 0, \\ y_2' - 5y_1 + 6y_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Точное решение: $y_1 = 5\exp(-2x)\cos(3x) + 1$; $y_2 = \exp(2x)(4\cos(3x) + 3\sin(3x)) + 1$. Численное решение удалось получить только в промежутке $[0, 0.4]$. Начальное приближение: $y_0 = 5$, $y_0 = 5$.

*Пример 7.* Начальная задача для НОДУ восьмого порядка

$$y^{(\mathrm{VIII})} - 0.2x^2\cos(x)y^{(\mathrm{V})} + 4y'' - y(1 + y) + 4x\cos(x) - x^3\sin(x)\cos(x) = 0. \qquad (8)$$

Точное решение $y_T = x\cos(x)$. Начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = -3$, $y^{(\mathrm{IV})}(0) = 0$, $y^{(\mathrm{V})}(0) = 5$, $y^{(\mathrm{VI})}(0) = 0$, $y^{(\mathrm{VII})}(0) = -7$. Начальное приближение: $y_0 = 0$.

Следует отметить, что для этого уравнения высокого порядка приближенное решение с достаточной точностью было получено на большом отрезке оси $x$ $(0 \le x \le 0.5\pi)$. Это можно объяснить тем, что решение уравнения (8) хорошо аппроксимируется алгебраическими полиномами, которыми выполнялась интерполяционная процедура при разработке численного метода.

*Пример 8.* "Концевая" задача для уравнения (8).

Условия на краю области интегрирования: $y(\pi/2) = 0$, $y'(\pi/2) = -\pi/2$, $y''(\pi/2) = -2$, $y'''(\pi/2) = \pi/2$, $y^{(\mathrm{IV})}(\pi/2) = 4$, $y^{(\mathrm{V})}(\pi/2) = -\pi/2$, $y^{(\mathrm{VI})}(\pi/2) = -6$, $y^{(\mathrm{VII})}(\pi/2) = \pi/2$. Начальное приближение: $y_0 = x$.

*Пример 9.* Нелинейное уравнение первого порядка

$$y' + \frac{2y}{x} - 2x\sqrt{y} = 0.$$

Точное решение $y_T = x^4/9$. Приближенное решение следует найти в области $[1, 2]$. Краевое условие $y(1) = 1/9$. Начальное приближение: $y_0 = 2$.

*Пример 10.* Уравнение Бернулли

$$xy' - 2y + x^3y^2 = 0. \tag{9}$$

Точное решение $y_T = 5/x^3$. Решение найдено в области $[1, 2]$. Начальное приближение: $y_0 = 5/x$.

*Пример 11.* Уравнение Бернулли (9) после дифференцирования

$$xy'' - y' + x^2y(2xy' + 3y) = 0.$$

Решение получено в области $[1, 2]$ с начальными условиями: $y(1) = 5$, $y'(1) = -15$.

Из табл. 2 видно, что после дифференцирования скорость сходимости к точному решению значительно снизилась — для получения результата потребовалось выполнить 81 итерацию вместо девяти итераций для решения исходного уравнения.

*Пример 12.* Уравнение Риккати

$$x^2y' + x^2y^2 - 2 = 0. \tag{10}$$

Точное решение $y_T = -1/x$. Начальное приближение: $y_0 = 0$. Решение получено в области $[1, 2]$.

*Пример 13.* Уравнение Риккати (10) после дифференцирования

$$y'' + 2yy' + \frac{4}{x^3} = 0.$$

Начальное приближение: $y_0 = 0$. Область решения $[1, 2]$.

Представленные в табл. 2 результаты решения уравнений, порядок которых повышен путем дифференцирования, показывают практически одинаковую точность с исходными уравнениями.

*Пример 14.* Нелинейное уравнение второго порядка

$$y''y - (y')^2 - y^4 = 0. \tag{11}$$

Точное решение $y_T = 1/\cos(x)$. Решение найдено в области $[0, 1]$. Начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Начальное приближение: $y_0 = 1$.

*Пример 15.* Уравнение (11) после троекратного дифференцирования

$$y^{(V)}y + y^{(IV)}y' - y'''(2y'' - 4y^3) - 36y''y'y^2 - 24(y')^3y = 0.$$

Точное решение $y_T = 1/\cos(x)$. Решение найдено в области $[0, 1]$. Начальные условия $y(0) - 1 = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) - 1 = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{(IV)}(0) - 5 = 0$. Начальное приближение: $y_0 = x + 0.5$.

Приведенные уравнения решены с применением стандартных программ из Mathcad, но точность решения при этом не превышала пяти зннаков после запятой. Из табл. 2 видно, что использование слишком густой сетки (более 60 узлов) иногда приводит к погрешности, поэтому рекомендуется использовать сетку не более чем 60 узлов.

## Заключение

Впервые предложен метод численной интерполяции решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка, отличительной особенностью которого является то, что вместо интерполяции искомых функций эта процедура применяется к их первым производным, а выражения для собственно функций находятся интегрированием полученных выражений, в результате чего отпадает необходимость использования узлов сетки, расположенных за пределами области решения задачи.

Разработанная на основе новой интерполяционной процедуры компьютерная программа Bounds1 работает только на исходных данных задачи без необходимости дополнительного программирования вычислительных деталей. Очевидно, что использование программы дает возможность заранее создавать каталоги, содержащие сотни файлов с исходными данными сильно нелинейных уравнений (не упрощенных с целью получения решения с помощью уже известных численных методов), часто используемых при математическом моделировании самых разнообразных физических процессов. Например, на протяжении нескольких веков различными авторами предлагались уравнения для описания движения по трубам жидкости и газа, а также для исследования устойчивости сжатых стержней. Точность решения по этим уравнениям может быть определена с помощью предлагаемой программы.

Основанное на приведенных в табл. 2 результатах решения нелинейных уравнений сравнение эффективности традиционного способа интерполирования и нового способа, основанного на использовании первой производной искомой функции, показывает неоспоримое преимущество нового подхода.

## Список литературы

[1] **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука; 1973: 631.

[2] **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука; 1968: 720.

[3] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы; 1959: 464.

[4] **Гончаров В.Л.** Теория интерполирования и приближения функций. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1954: 327.

[5] **Зубов В.И.** Интерполяция систем дифференциальных уравнений. Доклады академии наук СССР. 1991; 318(1):28–31.

[6] **Уолш Дж.Л.** Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Издательство иностранной литературы; 1961: 509.

[7] **Васильев А.Н., Лазовская Т.В., Тархов Д.А.** Аппроксимация функций Бесселя методом построения многослойных решений дифференциальных уравнений. Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020; 16(2):273–284. DOI:10.25559/SITITO.16.202002.273-284. Адрес доступа: `http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/649`.

[8] **Чье Е.У., Шеин А.Б.** Полиномиальная аппроксимация неоднородных дифференциальных уравнений для моделирования электронных устройств. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015; 47(3):90–93.

[9] **Литвинов В.А.** О влиянии способа аппроксимации неизвестной функции на устойчивость численных методов решения уравнения аномальной диффузии. Кибернетика и программирование. 2019; (2):23–29. DOI:10.25136/2306-4196.2019.2.29201.

[10] **Бакушев С.В.** Дифференциальные уравнения равновесия идеально упругопластической сплошной среды для плоской одномерной деформации при аппроксимации замыкающих уравнений биквадратичными функциями. Строительная механика и расчет сооружений. 2021; 295(2):37–45. DOI:10.37538/0039-2383.2021.2.37.45.

[11] **Бандурин Н.Г.** Новый численный метод порядка $N$ для решения интегро-дифференциальных уравнений общего вида. Вычислительные технологии. 2002; 7(2):3–10.

[12] **Бандурин Н.Г., Николаев А.П.** К решению нелинейных задач. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984; 24(4):612–615. DOI:10.1016/0041-5553(84)90107-1.

[13] **Bandurin N.G., Kalashnikov S.Y.** One example of comparison between the efficiency of two approaches to differential equations computational solution. Materials Science Forum. 2018; (931):170–173. DOI:10.4028/www.scientific.net/MSF.931.170.

[14] **Бандурин Н.Г., Калашников С.Ю.** Метод и пакет программ для численного решения систем существенно нелинейных интегро-дифференциально-алгебраических уравнений (корректные по Адамару двумерные и трехмерные краевые задачи). Вычислительные технологии. 2014; 19(5):3–11.

[15] **Бандурин Н.Г., Гуреева Н.А.** Метод и пакет программ для численного решения систем существенно нелинейных обыкновенных интегро-дифференциально-алгебраических уравнений. Математическое моделирование. 2012; 24(2):3–16.

[16] **Бандурин Н.Г.** Численное решение существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Вычислительные технологии. 2010; 15(3):31–38.

[17] **Николаев А.П., Бандурин Н.Г., Клочков Ю.В.** Новый эффективный способ интерполяции перемещений в конечноэлементом анализе оболочек. Строительная механика и расчет сооружений. 1991; (1):62–66.

[18] **Николаев А.П., Клочков Ю.В., Бандурин Н.Г.** К расчету осесимметричной оболочки с ветвящимся меридианом методом КЭ. Проблемы прочности. 1987; (12):66–69.

[19] **Киселева Н.В.** Нелинейные дифференциальные уравнения высших порядков: учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского; 2019: 32.

[20] **Киселева Н.В.** Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы обучающихся. Образовательные технологии и общество. 2018; 21(1):423–434.

Вычислительные технологии, 2023, том 28, № 5, с. 45–54. © ФИЦ ИВТ, 2023 ISSN 1560-7534
Computational Technologies, 2023, vol. 28, no. 5, pp. 45–54. © FRC ICT, 2023 eISSN 2313-691X

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.005

**A new technique for solving nonlinear ordinary differential equations**

N. G. Bandurin[1], Yu. V. Klochkov[2,*], O. V. Vakhnina[2], A. S. Andreev[2], Yu. M. Perevozkina[2]

[1]Volgograd State Technical University, 400074, Volgograd, Russia
[2]Volgograd State Agricultural University, 400002, Volgograd, Russia
[*]Corresponding author: Yuriy V. Klochkov, e-mail: klotchkov@bk.ru
*Received December 14, 2022, revised Aptil 07, 2023, accepted April 17, 2023.*

**Abstract**

In this paper, the concept of "a new method for solving equations" means that, for the first time in the history of numerical methods, there is no need to choose a solution method and program task. It is enough to enter in the order specified by the instruction only the necessary initial data: the texts of the equations, boundary conditions, the initial approximation and the parameters of the grid of nodes. Before, to solve non-linear differential equations it was necessary to use the described program with high accuracy in the form of tables of desired functions or their derivatives.

The Bounds1 program written in Delphi 7 algorithmic language is not intended for commercial use and can be freely used by the readers of the journal.

*Keywords:* interpolation procedure, boundary conditions, non-linear ordinary differential equations.

*Citation*: Bandurin N.G., Klochkov Yu.V., Vakhnina O.V., Andreev A.S., Perevozkina Yu.M. A new technique for solving nonlinear ordinary differential equations. Computational Technologies. 2023; 28(5):45–54. DOI:10.25743/ICT.2023.28.5.005. (In Russ.)

**References**

1. **Bakhvalov N.S.** Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka; 1973: 631. (In Russ.)
2. **Korn G., Korn T.** Spravochnik po matematike [Handbook of mathematics]. Moscow: Nauka; 1968: 720. (In Russ.)
3. **Berezin I.S., Zhidkov N.P.** Metody vychisleniy [Numerical methods]. Moscow: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy Literatury; 1959: 464. (In Russ.)
4. **Goncharov V.L.** Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [Theory of interpolation and approximation of functions]. Moscow: Gosudarstvennoye Izdatel'stvo Tekhniko-teoreticheskoy Literatury; 1954: 327. (In Russ.)
5. **Zubov V.I.** Interpolation of systems of differential equations. Doklady Mathematics. 1991; 43(3):653–656.
6. **Walsh J.L.** Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. American Mathematical Society. Colloquium Publications; 1935: 405.
7. **Vasilyev A.N., Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A.** Approximation of Bessel functions by the method of constructing multilayer solutions of differential equations. Sovremennye Informatsionnye Tekhnologii i IT-obrazovanie. 2020; 16(2):273–284. DOI:10.25559/SITITO.16.202002.273-284. Available at: http://sitito.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/649. (In Russ.)
8. **Chye E.U., Shein A.B.** Polynomial approximation of inhomogeneous differential equations for electronic devices modeling. Sovremennye Tekhnologii. Sistemnyy Analiz. Modelirovanie. 2015; 47(3):90–93. (In Russ.)
9. **Litvinov V.A.** On the influence of the method of approximation of an unknown function on the stability of numerical methods for solving the anomalous diffusion equation. Kibernetika i Programmirovanie. 2019; (2):23–29. DOI:10.25136/2306-4196.2019.2.29201. (In Russ.)

10. **Bakushev S.V.** Differential equations of equilibrium of ideally elastoplastic continuous medium for plane one-dimensional deformation in approximation of closing equations by biquadratic functions. Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy. 2019; (2):23–29. DOI:10.37538/0039-2383.2021.2.37.45. (In Russ.)
11. **Bandurin N.G.** New $N$-order numerical method for solution of general integro-differential equations. Computational Technologies. 2002; 7(2):3–10. (In Russ.)
12. **Bandurin N.G., Nikolaev A.P.** On the solution of nonlinear problems. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1984; 24(2):180–183. DOI:10.1016/0041-5553(84)90107-1.
13. **Bandurin N.G., Kalashnikov S.Y.** One example of comparison between the efficiency of two approaches to differential equations computational solution. Materials Science Forum. 2018; (931):170–173. DOI:10.4028/www.scientific.net/MSF.931.170.
14. **Bandurin N.G., Kalashnikov S.Yu.** Method and program package for solution of systems of essentially nonlinear integro-differential-algebraic equations (two- and three-dimensional boundary value problems). Computational Technologies. 2014; 19(5):3–11. (In Russ.)
15. **Bandurin N.G., Gureeva N.A.** A method and a software package for numerical solution of the systems of nonlinear ordinary integro-differential-algebraic equations. Mathematical Models and Computer Simulations. 2012; 4(5):455–463. DOI:10.1134/S2070048212050031.
16. **Bandurin N.G.** Numerical solution of essentially nonlinear integro-differential equations with a retarded argument. Computational Technologies. 2010; 15(3):31–38. (In Russ.)
17. **Nikolaev A.P., Bandurin N.G., Klochkov Yu.V.** A new effective method for interpolation of displacement in analysis of finite element shell. Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy. 1991; (1):62–66. (In Russ.)
18. **Nikolaev A.P., Klochkov Yu.V., Bandurin N.G.** To the calculation of an axisymmetric shell with a branching meridian by the FE method. Problemy Prochnosti. 1987; (12):66–69. (In Russ.)
19. **Kiseleva N.V.** Nelineynye differentsial'nye uravneniya vysshikh poryadkov: uchebno-metodicheskoe posobie [Nonlinear differential equations of higher orders: educational and methodological textbook]. Nizhny Novgorod: Natsional'nyy Issledovatel'skiy Nizhegorodskiy Gosudarstvennyy Universitet im. N.I. Lobachevskogo; 2019: 32. (In Russ.)
20. **Kiseleva N.V.** Computer complex on the qualitative theory of differential equations to support students' independent work. Obrazovatel'nyye Tekhnologii i Obshchestvo. 2018; 21(1):423–434. (In Russ.)